Chapitre 16
Applications linéaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E, F, G désignent des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

Dans certaines sections, F, G désigneront des s.e.v. de E : ce sera précisé et dans ce cas l'hypothèse ci-dessus sur F et G ne s'applique plus.

1 Généralités

1.1 Définition, morphisme d'e.v.

Définition 16.1 (Application linéaire)

Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si

$$\begin{cases} \forall u, v \in E & f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u \in E & f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in E \qquad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

On dit également que f est un morphisme (d'espaces vectoriels) de E dans F.

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$.
- Lorsque $F = E$, on note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$.

Proposition 16.2

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall x \in E \qquad f(-x) = -f(x)$
3. L'image de toute combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \forall x_1, \dots, x_n \in E \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration. Comme f est une application linéaire, elle est en particulier un morphisme de groupes de $(E,+)$ dans $(F,+)$. On en déduit les deux premières assertions. La troisième se montre immédiatement par récurrence. $\square$

Exemple 1. L'application nulle $0 \in F^E$ est linéaire, donc $0 \in \mathcal{L}(E,F)$.

Exemple 2. L'application id_E est clairement linéaire de E dans E. On a donc $\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple 3. Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 2x - 3y \end{array}$$

Définition 16.3 (**morphismes)**

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est un endomorphisme (de E).
2. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et f est bijective, on dit que f est un isomorphisme (d'e.v.).
3. Si f est un endomorphisme et un isomorphisme, on dit que f est automorphisme.

Exemple 4. L'application id_E est un automorphisme de E car elle est bijective (sa réciproque est elle-même).

1.2 Exemples classiques d'applications linéaires

Les applications suivantes sont toutes linéaires. Sont-elles des endomorphismes ? Des isomorphismes ?

Endomorphismes ? Isomorphismes ?

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{n+1}(I,\mathbb{R}) &\to C^n(I,\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A^\top \end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{K}$
$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

Avec $CV := \{(u_n) \in \mathbb{K}^n \mid \exists \ell \in \mathbb{K} \quad u_n \to \ell\}$
(notation non-officielle !)
$$\begin{aligned} CV &\to \mathbb{K} \\ (u_n) &\mapsto \lim u_n \end{aligned}$$

1.3 Opérations sur les morphismes

Rappel : pour toutes applications $u, v \in F^E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :

$$\begin{aligned} u+v : E &\to F \\ x &\mapsto u(x)+v(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda u : E &\to F \\ x &\mapsto \lambda u(x) \end{aligned}$$

Ces opérations font de F^E un e.v.

Proposition 16.4 (Stabilité par combinaison linéaire)

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application $\alpha u + \beta v$ est également linéaire.
Dit autrement, $\mathcal{L}(E,F)$ est un s.e.v. de F^E.

Démonstration. $\mathcal{L}(E,F) \subset F^E$, qui est un $\mathbb{K}$-e.v. [1]. De plus, $0 \in \mathcal{L}(E,F)$ donc $\mathcal{L}(E,F) \neq \varnothing$.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrons que $\alpha u + \beta v \in \mathcal{L}(E,F)$. Il est clair que $\alpha u + \beta v$ est une application de E dans F. Il suffit donc de montrer que $\alpha u + \beta v$ est linéaire.

□

Plus généralement, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire.

Proposition 16.5 (Stabilité par composition)

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$.
De plus, la composition est bilinéaire : avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et u, v, w des applications linéaires telles que ce qui suit ait un sens, on a :

$$(\alpha u + \beta v) \circ w = \alpha u \circ w + \beta v \circ w$$
$$w \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha w \circ u + \beta w \circ v$$

1.4 Isomorphismes

Proposition 16.6 (Stabilité par passage à l'inverse)

Si $u : E \to F$ est un isomorphisme (d'e.v.), alors l'application $u^{-1} : F \to E$ est également un isomorphisme (d'e.v.). De plus $(u^{-1})^{-1} = u$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective. On a vu que dans ce cas $u^{-1} : F \to E$ est bijective et $(u^{-1})^{-1} = u$. Il reste à montrer que u^{-1} est linéaire.
Soit $y_1, y_2 \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Comme u est bijective, on peut poser

$$x_1 := u^{-1}(y_1) \qquad x_2 := u^{-1}(y_2)$$

1. On a vu que si Ω est un ensemble quelconque, alors $\mathbb{K}^\Omega$ est un $\mathbb{K}$-e.v. On peut en fait généraliser : si F est un $\mathbb{K}$-e.v., alors F^Ω aussi. En particulier, F^E est un $\mathbb{K}$-e.v. Mais ce résultat n'est guère utile en pratique.

Alors

$$\begin{aligned} u^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= u^{-1}(\alpha u(x_1) + \beta u(x_2)) \\ &= u^{-1}(u(\alpha x_1 + \beta x_2)) \\ &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ &= \alpha u^{-1}(y_1) + \beta u^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Donc u^{-1} est linéaire.
La deuxième assertion a été démontrée au chapitre 4 dans un cadre plus général. □

Proposition 16.7

Si $u : E \to F$ et $v : F \to G$ sont des isomorphismes (d'e.v.), alors $v \circ u : E \to G$ est un isomorphisme et $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Démonstration. On a déjà montré que $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$. De plus, on a démontré au chapitre 4 que la composée d'applications bijectives est encore bijective, et qu'alors la formule ci-dessus est vérifiée. □

1.5 Image directe, image réciproque d'un s.e.v.

Re-re-rappel : soit $u : E \to F$ une application quelconque. Pour toutes parties $A \subset E$ et $B \subset F$ (pas forcéments des s.e.v. !), on pose

$$u(A) := \{u(x) \mid x \in A\} \subset F \qquad\qquad u^{-1}(B) := \{x \in E \mid u(x) \in B\} \subset E$$

$$y \in u(A) \iff \exists x \in A \quad u(x) = y \qquad\qquad x \in u^{-1}(B) \iff u(x) \in B$$

Malgré la notation, la définition de $u^{-1}(B)$ ne fait pas intervenir u^{-1} (qui n'existe même pas a priori). Donc :

L'expression $u^{-1}(B)$ a un sens même si u n'est pas bijective ! ! !

Proposition 16.8

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Pour tout s.e.v. A de E, l'ensemble $u(A)$ est un s.e.v. de F.
- Pour tout s.e.v. B de F, l'ensemble $u^{-1}(B)$ est un s.e.v. de E.

Démonstration.

□

1.6 Noyau et image d'un morphisme

Définition 16.9 (Noyau et image)

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de u l'ensemble

$$\operatorname{Ker} u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}\left(\{0_F\}\right)$$

et on appelle image de u si

$$\operatorname{Im} u = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad u(x) = y\} = u(E)$$

Autrement dit,

- $x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0_F$.
- $y \in \operatorname{Im} u \iff \exists x \in E \qquad y = u(x)$

Théorème 16.10

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$

1. $\operatorname{Ker} u$ est un s.e.v. de E.
2. $\operatorname{Im} u$ est un s.e.v. de F.
3. $\boxed{u \text{ est injective si et seulement si } \operatorname{Ker} u = \{0_E\}.}$
4. u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

Démonstration.

1. Immédiat car $\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_F\})$ et $\{0_F\}$ est un s.e.v. de F.
2. Immédiat car $\operatorname{Im} u = u(E)$ et que E est un s.e.v. de E.
3. Supposons que u est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors,

$$\begin{aligned} & u(x) = 0_F \\ \Longrightarrow\ & u(x) = u(0_E) \\ \Longrightarrow\ & x = 0_E && \text{par injectivité de } u \end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ (l'autre inclusion est évidente). Réciproquement, si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, montrons que u est injective. Soit $x, x' \in E$.

$$\begin{aligned}
u(x) = u(x') &\implies u(x) - u(x') = 0_F \\
&\implies u(x - x') = 0_F \\
&\implies x - x' \in \operatorname{Ker} u \\
&\implies x - x' = 0_E && \text{car } \operatorname{Ker} u = \{0_E\} \\
&\implies x = x'
\end{aligned}$$

D'où u est injective.

4. Comme $\operatorname{Im} u = u(E)$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im} u = F \\
\iff &u(E) = F \\
\iff &u \text{ surjective} && \text{(cf chapitre 4)}
\end{aligned}$$

□

Exemple 5. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned}
u: \quad &\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\
&(x, y, z) \mapsto (x + y - z, z)
\end{aligned}$$

Méthode

Plus généralement, pour trouver si un vecteur y est dans $\operatorname{Im} u$, il faut résoudre l'équation $(E_y) : u(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, et où $y \in F$ est considéré comme un paramètre.
Alors $y \in \operatorname{Im} u$ si et seulement si l'équation (E_y) admet au moins une solution (il n'est pas nécessaire de la trouver, il suffit de montrer qu'elle existe).

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble est un s.e.v. de E, on peut notamment montrer que c'est le noyau (ou encore l'image) d'une application linéaire $u : E \to F$.

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $V := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

2 Endomorphismes

2.1 L'anneau $\mathcal{L}(E)$

Proposition 16.11

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif sauf exception).

Démonstration.

- L'élément neutre pour $+$ est l'application nulle de E dans E.
- Le symétrique de u pour $+$ est l'endormorphisme $x \mapsto -u(x)$, noté $-u$.
- L'élément neutre pour $\circ$ est id_E.

Les autres propriétés se démontrent aisément. □

Remarque. En fait, on a même que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

En particulier, $\boxed{\text{si } u \in \mathcal{L}(E)}$ (donc u est un endomorphisme de E), les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est un automorphisme.
2. u est un isomorphisme.
3. u est bijective.
4. u admet une application réciproque : il existe $v : E \to E$ tel que $v \circ u = u \circ v = \mathrm{id}_E$
5. u est inversible (i.e. symétrisable pour $\circ$) : il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = u \circ v = \mathrm{id}_E$

Dans ce cas, on dira que u est inversible et on notera $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ sa réciproque. Plus généralement, on utilisera la notation multiplicative l'anneau $\mathcal{L}(E)$:

Définition 16.12 (Notation u^n)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

- $u^0 := \mathrm{id}_E$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n := \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si u est inversible, $u^{-n} := \underbrace{u^{-1} \circ u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1}}_{n \text{ fois}}$

  On a notamment $(u^n)^{-1} = (u^{-1})^n = u^{-n}$.

Attention : pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note typiquement $f^n = \underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{n \text{ fois}}$ comme par exemple $\cos^2$, $\sin^2$, etc. Or, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'expression "$u \times u$" n'a aucun sens : ce serait l'application qui à x associe "$u(x) \times u(x)$", cependant on a $u(x) \in E$ et la loi $\times$ n'est pas définie sur E (c'est juste un e.v.).

Il faut donc voir une composition derrière chaque puissance : par exemple, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$u^{n+m} = u^n \circ u^m$$

Proposition 16.13 (Calculs dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$)

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que u, v commutent, i.e. $\boxed{u \circ v = v \circ u}$. Alors

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u^k \circ v^{n-k}\right)$$

$$(u-v)^n = (u-v) \circ \sum_{k=0}^{n-1} \left(u^k \circ v^{n-k-1}\right)$$

2.2 Groupe linéaire $GL(E)$

Rappel : dans un anneau $(A, +, \times)$, l'ensemble des éléments inversibles de A (qu'on avait noté $A^\times$) est un groupe pour la loi $\times$.

Définition 16.14 (Groupe linéaire $GL(E)$)

Les éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ sont (par définition) les automorphismes de E.
On note $(GL(E), \circ)$ le groupe des automorphismes de E, dit groupe linéaire de E.

Proposition 16.15

Soit $u, v \in GL(E)$. Alors :

- $u^{-1} \in GL(E)$ et $(u^{-1})^{-1} = u$
- $(v \circ u) \in GL(E)$ et $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$

Démonstration. C'est un cas particulier des Propositions 16.6 et 16.7. □

Exemple 7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - 2u - 3\mathrm{id}_E = 0$. Montrer que $u \in GL(E)$ et déterminer u^{-1}.

3 Applications linéaires et dimension

3.1 Caractérisations d'une application linéaire

Théorème 16.16 (Caractérisation par l'image des éléments d'une base)

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille *quelconque* de vecteurs de F. Alors il existe une *unique* application linéaire u de E dans F telle que

$$\forall i \in I \qquad u(e_i) = f_i$$

Ainsi, la donnée des $u(e_i)$ pour tout $i \in I$ suffit pour déterminer entièrement l'application u.

Heuristique de la preuve. On raisonne par analyse-synthèse. Analyse : on suppose qu'une telle application linéaire u existe. Pour tout vecteur x de E, on peut l'écrire sous la forme :

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

et dans ce cas, l'image par u est nécessairement, par linéarité,

$$u(x) = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p$$

Ceci montre que $u(x)$ est déterminé de manière unique. Par arbitraire sur x, l'application u en question est unique.
Synthèse : on vérifie que l'application trouvée en analyse est bien linéaire et vérifie $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$. □

Corollaire 16.17

Si deux applications linéaires coïncident sur une base, alors elles sont égales.

Théorème 16.18 (Caractérisation par des s.e.v. supplémentaires)

Soit A, B deux s.e.v. supplémentaires de E. Soit $v : A \to F$ et $w : B \to F$ des applications linéaires données. Alors il existe une *unique* application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$u|_A = v \qquad \text{et} \qquad u|_B = w$$

3.2 Isomorphismes en dimension finie

Théorème 16.19

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

1. u est injective si et seulement si la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre.
2. u est surjective si et seulement si la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de F.
3. u est bijective si et seulement si la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de F.

En particulier, si E, F sont de dimensions finies différentes, aucune application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ne peut être bijective.

Démonstration.

1. **Sens direct :** on suppose u injective. Montrons que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_n u(e_n) = 0 \\
\implies &u(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0 = u(0) \\
\implies &\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 && \text{car } u \text{ est injective} \\
\implies &\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 && \text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est une famille libre}
\end{aligned}$$

Sens réciproque : on suppose $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ libre. Il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. On décompose x selon la base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

Comme $x \in \operatorname{Ker} u$, on a

$$\begin{aligned}
&u(x) = 0 \\
\implies &u(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0 \\
\implies &\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_n u(e_n) = 0 \\
\implies &\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 && \text{car } (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est libre}
\end{aligned}$$

Ainsi, $x = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. Donc u est injective.

2.

3. Cette assertion découle des deux premières.

$\square$

Définition 16.20

E et F sont dit isomorphes s'il existe un isomorphisme $u : E \to F$. On note alors $E \simeq F$.

Proposition 16.21

On suppose que E est de dimension finie. Alors $E \simeq F$ si et seulement si $\dim E = \dim F$ (ce qui sous-entend que F est de dimension finie).

Démonstration. Sens direct : supposons $E \simeq F$ et notons $u : E \to F$ un isomorphisme. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors par le Théorème 16.19, comme u est bijectif, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de F. Donc F est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

Sens réciproque : On suppose $\dim E = \dim F = n$. On pose $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Enfin, par le théorème 16.16, on pose $u \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application telle que $u(e_i) = f_i$. En particulier, l'image de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F. Par le Théorème 16.19, u est bijective. C'est donc un isomorphisme, si bien que $E \simeq F$. $\square$

Corollaire 16.22

Tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Immédiat car $\dim \mathbb{K}^n = n$ et deux e.v. de même dimension finie sont isomorphes par ce qui précède. $\square$

3.3 Le cas particulier où $\dim E = \dim F$

Théorème 16.23

On suppose que E, F sont de **même** dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$u \text{ est injective} \quad \text{ssi} \quad u \text{ est bijective} \quad \text{ssi} \quad u \text{ est surjective}$$

Démonstration. On note $n = \dim E = \dim F$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Comme $\dim F = n$, et que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ possède n éléments,

$$\begin{aligned} &(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est libre} \\ \text{ssi } &(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est une base de } F \\ \text{ssi } &(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est génératrice de } F \end{aligned}$$

Et le Théorème 16.19 transforme ces équivalences en le résultat voulu. □

Proposition 16.24 (Être inversible d'un côté suffit)

On suppose que E, F sont de **même** dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est bijective
2. Il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{id}_E$.
3. Il existe $w \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ w = \mathrm{id}_F$.

Et dans ce cas, $v = w = u^{-1}$.

Démonstration. Montrons que les assertions 1 et 2 sont équivalentes. Il est clair que 1 implique 2 en posant $v = u^{-1}$. Supposons maintenant qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Montrons que u est bijective. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors

$$x = \mathrm{id}_E(x) = (v \circ u)(x) = v(0_F) = 0_E$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$. D'où u est injectif, et par le théorème 16.23, on en déduit que u est bijective.

Montrons que les assertions 1 et 3 sont équivalentes. Il est clair que 1 implique 3 en posant $w = u^{-1}$. Supposons maintenant qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ w = \mathrm{id}_F$. Montrons que u est bijective. Soit $y \in F$. On a

$$u(w(y)) = (u \circ w)(y) = y$$

Ainsi, y admet $w(y)$ comme antécédent par u, donc $y \in \operatorname{Im} u$. Par arbitraire sur y, on a donc $F = \operatorname{Im} u$. D'où u est surjective. Par le théorème 16.23, on en déduit que u est bijective.

Enfin, si $v \circ u = \mathrm{id}_E$ comme u est bijective, on peut composer à droite par u^{-1} et obtenir $v = u^{-1}$. De même $u \circ w = \mathrm{id}_F$ entraine $w = u^{-1}$. □

3.4 Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$

Proposition 16.25

On suppose E,F de dimension finies. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

Démonstration. On pose $n = \dim E$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E,F) &\to F^n \\ u &\mapsto (u(e_1),\dots,u(e_n)) \end{aligned}$$

On peut facilement montrer que φ est linéaire, càd pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ et $u,v \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$. On va montrer que φ est un isomorphisme.
Par le théorème 16.16, on a

$$\forall (f_1,\dots f_n) \in F^n \qquad \exists ! u \in \mathcal{L}(E,F) \qquad \begin{cases} u(e_1) = f_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = f_n \end{cases}$$

Cette assertion se réécrit

$$\forall (f_1,\dots f_n) \in F^n \qquad \exists ! u \in \mathcal{L}(E,F) \qquad \varphi(u) = (f_1,\dots,f_n)$$

Ce qui signifie exactement que φ est bijective. Donc φ est un isomorphisme. Alors, $\mathcal{L}(E,F)$ et F^n ont même dimension. Comme

$$\dim F^n = n \dim F = \dim E \times \dim F$$

on en déduit le résultat. □

4 Le théorème du rang

4.1 Rang (d'une famille, d'une application)

Définition 16.26 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E. On définit le rang de la famille $(x_1,\dots,x_n)$ par :

$$\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_n) := \dim\left(\operatorname{Vect}(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)$$

Remarque. La famille $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ engendre $\operatorname{Vect}(x_1,x_2,\dots,x_n)$, et en particulier $\operatorname{Vect}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est bien de dimension finie et majorée par n. En particulier,

$$\operatorname{rg}(x_1,x_2,\dots,x_n) \leq n$$

Lemme 16.27

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(u(e_i)_{i\in I}\right)$$

Définition 16.28 (Rang d'une application linéaire)

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que u est de rang fini si $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie. On appelle alors rang de u l'entier

$$\mathrm{rg}\, u := \dim(\mathrm{Im}\, u)$$

Remarque.

- Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et on a $\mathrm{rg}\, u \leq \dim F$.
- Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et on a $\mathrm{rg}\, u \leq \dim E$.
  En effet, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ donc $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie et majorée par $n = \dim E$.

4.2 Premiers résultats sur le rang

Proposition 16.29

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Si u est un isomorphisme et si v est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et
$$\mathrm{rg}\,(v \circ u) = \mathrm{rg}\, v$$
2. Si v est un isomorphisme et si u est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et
$$\mathrm{rg}\,(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$$

Démonstration. On a $\mathrm{Im}\,(v \circ u) = \{v(u(x)) \mid x \in E\} = \{v(y) \mid y \in \mathrm{Im}\, u\} = v\,(\mathrm{Im}\, u)$.

1. Comme u est un isomorphisme, u est surjective d'où $\mathrm{Im}\, u = F$. Alors $\mathrm{Im}\,(v \circ u) = v(F) = \mathrm{Im}\, v$. Comme v est de rang fini, on en déduit que $v \circ u$ aussi et $\mathrm{rg}\,(v \circ u) = \mathrm{rg}\, v$.
2. Comme v est un isomorphisme, $v : F \to G$ est injective. On pose alors sa restriction à $\mathrm{Im}\, u$ et sa corestriction à $v(\mathrm{Im}\, u)$
$$\begin{aligned} v|_{\mathrm{Im}\, u} : \mathrm{Im}\, u &\to v(\mathrm{Im}\, u) \\ x &\mapsto v(x) \end{aligned}$$
Il est clair que cette restriction est encore injective, et par définition de $v(\mathrm{Im}\, u)$, elle est aussi surjective. C'est donc un isomorphisme. Alors $\mathrm{Im}\, u \simeq v(\mathrm{Im}\, u)$. Comme u est de rang fini, $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie (égale à $\mathrm{rg}\, u$), donc $v(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}\,(v \circ u)$ aussi et les dimensions sont égales. Finalement, $v \circ u$ est de rang fini et $\mathrm{rg}\,(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u$

$\square$

Proposition 16.30

Soit u, v deux morphismes de rangs finis. Alors $v \circ u$ est de rang fini et

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$$

4.3 Théorème du rang

Lemme 16.31

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Démonstration. Soit donc S tel que $\operatorname{Ker} u \oplus S = E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} v : S &\to \operatorname{Im} u \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

Montrons que v est un isomorphisme. Il est clair que v est linéaire.

- Montrons que v est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker} v$. Alors $v(x) = 0 = u(x)$, donc $x \in \operatorname{Ker} u$. Or, par définition, $\operatorname{Ker} v \subset S$, donc $x \in S$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker} u \cap S$. Or, comme S et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires, on a $\operatorname{Ker} u \cap S = \{0\}$. Donc $x = 0$. Ainsi, v est injective.
- Montrons que v est surjective. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. On décompose alors x en

$$x = x_K + x_S \qquad \text{avec} \quad (x_K, x_S) \in (\operatorname{Ker} u) \times S$$

  Alors, $u(x) = u(x_K) + u(x_S) = 0 + u(x_S)$. Or, comme $x_S \in S$, on a $v(x_S) = u(x_S) = u(x) = y$. Ainsi, y admet un antécédent par v. Par arbitraire sur y, v est surjective.

□

Théorème 16.32 (Théorème du rang)

On suppose E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est de rang fini et

$$\boxed{\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u}$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, u est de rang fini (cf remarque sous la définition 16.28). Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, i.e. $\operatorname{Ker} u \oplus S = E$. Alors

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim S$$

On considère

$$\begin{aligned} v : S &\to \operatorname{Im} u \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

par le lemme précédent, cette application est un isomorphisme. En particulier, $S \simeq \operatorname{Im} u$ donc $\dim S = \dim(\operatorname{Im} u)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) \\ &= \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u \end{aligned}$$

□

5 Endomorphismes remarquables

Dans cette section, on étudie des endomorphismes de E particuliers. On se place donc sur l'ensemble $\mathcal{L}(E)$. Dans ce cadre, F, G désigneront des s.e.v. de E (et non des $\mathbb{K}$-e.v. quelconques comme dans l'hypothèse).

5.1 Homothéties

Définition 16.33

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{id}_E$ est un endomorphisme de E appelé homothétie de rapport λ.

Si $\lambda \neq 0$, on a $\lambda \mathrm{id}_E \in GL(E)$ et dans ce cas $(\lambda \mathrm{id}_E)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{id}_E$.

5.2 Projecteurs

Définition 16.34 (Projecteur)

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E. Alors, on sait que pour tout élément $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On définit alors

$$\begin{aligned} p : E &\to E \\ x &\mapsto x_F \qquad\qquad (\text{avec } x = x_F + x_G) \end{aligned}$$

L'application p est appelée projecteur sur F parallèlement à G.

Dans la suite, on notera $p_{F//G}$ le projecteur sur F parallèlement à G (notation semi-officielle).

Remarque. Soit $p = p_{F//G}$.

- Pour tout $x \in F$, on a $p(x) = x$. Autrement dit $p|_F = \mathrm{id}_F$.
- Pour tout $x \in G$, on a $p(x) = 0_E$. Autrement dit $p|_G = 0$.

Exemple 8. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$, l'application

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \mathrm{Re}\, z \end{aligned}$$

est un projecteur sur le s.e.v. $\mathbb{R}$ parallèlement au s.e.v. $i\mathbb{R}$.

Exemple 9. Le projecteur sur E parallèlement à $\{0_E\}$ est ...
Le projecteur sur $\{0_E\}$ parallèlement à E est ...

Exemple 10. L'application

$$\begin{aligned} p : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto \frac{1}{2}(A + A^\top) \end{aligned}$$

est un projecteur sur $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$.

Proposition 16.35

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E et $p = p_{F//G}$ le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

- p est linéaire, i.e. $p \in \mathcal{L}(E)$.
- $F = \operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$
- $G = \operatorname{Ker} p$

Corollaire 16.36

Tout projecteur p est un projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
En particulier, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Remarque. Attention, si $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$, cela ne suffit pas à conclure que u est un projecteur. Par exemple, si p est un projecteur et que $u = 2p$, on a $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} p$, donc on a bien

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$$

mais u n'est pas un projecteur (en utilisant la Proposition ci-après, on a $u \circ u = (2p) \circ (2p) = 4(p \circ p) = 4\mathrm{id}_E$ donc u n'est pas un projecteur).

Proposition 16.37

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Démonstration. **Sens direct** : on suppose que p est un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. supplémentaire G. Montrons que $p \circ p = p$. Soit $x \in E$: on note $(x_F, x_G) \in F \times G$ tels que $x = x_F + x_G$. Alors

$$(p \circ p)(x) = p(p(x)) = p(x_F)$$

Or,

$$x_F = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$$

est la décomposition de x_F selon les s.e.v. supplémentaires F, G. Ainsi,

$$(p \circ p)(x) = p(x_F) = x_F = p(x)$$

D'où $p \circ p = p$ par arbitraire sur x.

Sens réciproque : on suppose que $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$. Montrons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires et que p est un projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

1. Montrons que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0_E\}$. Soit $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$. Comme $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Comme $y \in \operatorname{Ker} p$, on a $p(y) = 0$. Ainsi,

$$0 = p(y) = p(p(x)) = (p \circ p)(x) = p(x) = y$$

   Finalement, $y = 0$. D'où $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0_E\}$.

2. Montrons que $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$. Soit $x \in E$. Alors on affirme que

$$x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p}$$

   Justifions la ligne précédente : d'une part, $p(x) \in \operatorname{Im} p$ par définition de $\operatorname{Im} p$. D'autre part,

$$p\left(x - p(x)\right) = p(x) - (p \circ p)(x) = p(x) - p(x) = 0_E$$

   donc on a bien $x - p(x) \in \operatorname{Ker} u$. Finalement, on a bien $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$. Ainsi, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

3. Montrons que p est un projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. Soit $x \in E$. Par ce qui précède, on peut décomposer x en :

$$x = \underbrace{x_K}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{x_I}_{\in \operatorname{Im} p}$$

   Il suffit alors de montrer que $p(x) = x_I$. Or, on a vu que

$$x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p}$$

   Par unicité de la décomposition, on a en particulier que $p(x) = x_I$. D'où p est bien le projecteur annoncé.

$\square$

5.3 Symétries

Définition 16.38 (Symétrie)

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E. Alors, on sait que pour tout élément $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On définit alors

$$\begin{aligned} s : E &\to E \\ x = x_F + x_G &\mapsto x_F - x_G \end{aligned}$$

L'application s est appelée <u>symétrie par rapport à F parallèlement à G</u>.

Dans la suite, on notera $s_{F//G}$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G (notation semi-officielle).

Remarque. Soit $s = s_{F//G}$.

- Pour tout $x \in F$, on a $s(x) = x$. Autrement dit $s|_F = \mathrm{id}_F$.
- Pour tout $x \in G$, on a $s(x) = -x$. Autrement dit $s|_G = -\mathrm{id}_G$.

Exemple 11. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$, l'application

$$\begin{aligned} s : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z} \end{aligned}$$

est une symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.

Exemple 12. La symétrie par rapport à E parallèlement à $\{0_E\}$ est ...
La symétrie par rapport à $\{0_E\}$ parallèlement à E est ...

Proposition 16.39

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E et $s = s_{F//G}$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors :

- s est linéaire, i.e. $s \in \mathcal{L}(E)$.
- $F = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$
- $G = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$

Corollaire 16.40

Toute symétrie s est une symétrie par rapport à $\text{Ker}\,(s - \text{id}_E)$ et parallèlement à $\text{Ker}\,(s + \text{id}_E)$.
En particulier, $E = \text{Ker}\,(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}\,(s + \text{id}_E)$.

Proposition 16.41

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \text{id}_E$.

Corollaire 16.42

Toute symétrie s est un automorphisme, et de plus $s^{-1} = s$.

Exemple 13. L'application

$$s: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$$

est une symétrie car $s \circ s = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$. On peut montrer que $s = s_{F//G}$ avec

$$F = \{(\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(-\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

6 Formes linéaires et hyperplans

Dans cette section, F désignera typiquement un s.e.v. de E.

6.1 Formes linéaires

Dimension quelconque

Définition 16.43 (Forme linéaire)

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires sur E est souvent noté $E^* := \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. Il est appelé espace dual de E.

Exemple 14. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & 2x+3y \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$, i.e. un élément de $(\mathbb{K}^2)^*$.

Exemple 15. L'application $P \mapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Remarque. Si $\varphi \in E^*$, alors ou bien $\varphi = 0$, ou bien φ est surjective (donc $\text{rg}\,\varphi = 1$).
En effet, $\text{Im}\,\varphi \subset \mathbb{K}$ et donc $\text{rg}\,\varphi = \dim(\text{Im}\,\varphi) \in \{0,1\}$. Si $\text{rg}\,\varphi = 0$, alors $\varphi = 0$. Si $\text{rg}\,\varphi = 1$, alors $\text{Im}\,\varphi = \mathbb{K}$ par un argument de dimension, donc φ est surjective.

Dimension finie

Proposition 16.44

Si E est de dimension finie, alors E^* aussi et on a $\dim E^* = \dim E$.

Démonstration. Cela vient du fait que $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E$. □

Définition 16.45

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ l'unique forme linéaire telle que

$$e_i^*(e_i) = 1 \qquad \text{et pour tout } j \neq i \qquad e_i^*(e_j) = 0$$

La forme linéaire $e_i^* \in E^*$ est appelée forme coordonée d'indice i selon la base $(e_i)_{1<i<n}$.

Autrement dit, pour tous indices $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

La donnée de $e_i^*(e_j)$ est suffisant pour déterminer entièrement l'application linéaire e_i^* d'après le théorème 16.16.

Remarque. Si $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ est un vecteur de E, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i$$

Autrement dit, $e_i^*(x)$ est égal à la i-ième coordonnée de x selon la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Proposition 16.46

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration. Montrons que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une famille libre. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0$. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, si on évalue en e_j, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j) = 0 \\ \Longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{i,j} = 0 \\ \Longrightarrow & \alpha_j = 0 \end{aligned}$$

Par arbitraire sur j, on en déduit que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ainsi la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est libre. Or, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ possède n éléments et $\dim E^* = \dim E = n$. Donc, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*. □

En particulier, étant toute forme linéaire $\varphi \in E^*$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des e_i^* : il existe un (unique) n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$$

Attention : la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ dépend du choix de la base $(e_1, \dots, e_n)$. Chaque base sur E est associée à une (unique) base duale de E^*.

6.2 Hyperplans vectoriels

Dimension quelconque

Définition 16.47 (Hyperplan)

On appelle hyperplan (vectoriel) de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 16.48 ((Hors programme))

Soit φ, ψ deux formes linéaires non nulles. Soit $H_1 = \operatorname{Ker} \varphi$ et $H_2 = \operatorname{Ker} \psi$ deux hyperplans de E. Alors $H_1 = H_2$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.

Proposition 16.49 (Caractérisation des hyperplans)

Soit H un s.e.v. de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E
2. Il existe une droite vectorielle D, non contenue dans H, telle que $E = D \oplus H$.

Exemple 16. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de E et déterminer une droite vectorielle supplémentaire.

Remarque. Si $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan, pour trouver la droite D, il suffit de prendre $D = \operatorname{Vect}(x)$, où $x \in E$ peut être tout vecteur tel que $\varphi(x) \neq 0$.
Dans l'exemple ci-dessus, on aurait pu prendre $D = \operatorname{Vect}(Q)$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$.

Dimension finie

Proposition 16.50

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim H = n-1$.

Démonstration. Sens direct : si $H = \operatorname{Ker} \varphi$ avec $\varphi \in E^*$ non nulle, alors par le théorème du rang,

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim(\operatorname{Ker} \varphi) + \operatorname{rg} \varphi \\ &= \dim H + 1\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition 16.51 (Équations d'un hyperplan)

On suppose E de dimension finie. Soit H un hyperplan de E.
On appelle équation de H toute équation de la forme $\varphi(x) = 0$, d'inconnue $x \in E$, et où $\varphi \in E^*$ est telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

Remarque. Autrement dit, $x \in H$ si et seulement si x est solution de l'équation de H.

Proposition 16.52

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et qu'on écrit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, l'équation d'un hyperplan est de la forme

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Démonstration. En effet, soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x) = 0 &\iff \varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = 0 \\ &\iff x_1 \varphi(e_1) + \cdots + x_n \varphi(e_n) = 0 \\ &\iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\end{aligned}$$

en posant $a_i := \varphi(e_i) \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De plus, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ car, si tous les a_i étaient nuls, on aurait $\varphi(e_1) = \cdots = \varphi(e_n) = 0$, ce qui entrainerait que φ est nulle. □

Remarque. Ainsi, H est un hyperplan si et seulement s'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$H = \{x \in E \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$

où $x_1, \dots, x_n$ désignent les coordonnées de x dans une base donnée de E.

Exemple 17. Montrer que $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$ est un e.v. et déterminer sa dimension.

Remarque. L'équation d'un hyperplan dépend techniquement de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E choisie. Mais sur $\mathbb{K}^n$, on prend systématiquement la base canonique usuelle.

Proposition 16.53

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.
Les hyperplans d'équations respectives (en considérant la même base de E)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$$

sont égaux si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \qquad (b_1, \dots, b_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n)$.

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 16.48. □

Proposition 16.54

On suppose E de dimension finie $n \geq 2$. Soit H_1, H_2 deux hyperplans de E. Alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \begin{cases} n-1 & \text{si } H_1 = H_2 \\ n-2 & \text{si } H_1 \neq H_2 \end{cases}$$

Si $m \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \dots, H_m$ sont des hyperplans de E, alors

$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{m} H_k\right) \geq n - m$$

Proposition 16.55

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un s.e.v. de E de dimension $n - m$ (avec $m \leq n$). Alors il existe m hyperplans $H_1, \dots, H_m$ de E tels que

$$F = \bigcap_{k=1}^{m} H_k$$

Exemple 18. Le s.e.v. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\right\}$ est de dimension $1 = \dim \mathbb{R}^3 - 2$ (vu en TD). On peut donc écrire F comme l'intersection de 2 hyperplans, par exemple les hyperplans d'équation $x - y + z = 0$ et $2x - y = 0$.